21.10.

Minule: zavedení derivace fce

$f \dots$ fce, $x \in D_f$ pevné

Def. číslo $f'(x) := \lim_{\bar{x} \to x} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x}$

se nazývá derivace fce f v bodě x

Pro proměnné x tak máme fci

$f'(x)$ = derivace fce f.

Spočítali jsme derivaci lineární

fce: $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

spec. případ – konstantní fce

$f(x) = b \Rightarrow f'(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

Význam derivace = změna (původní fce)

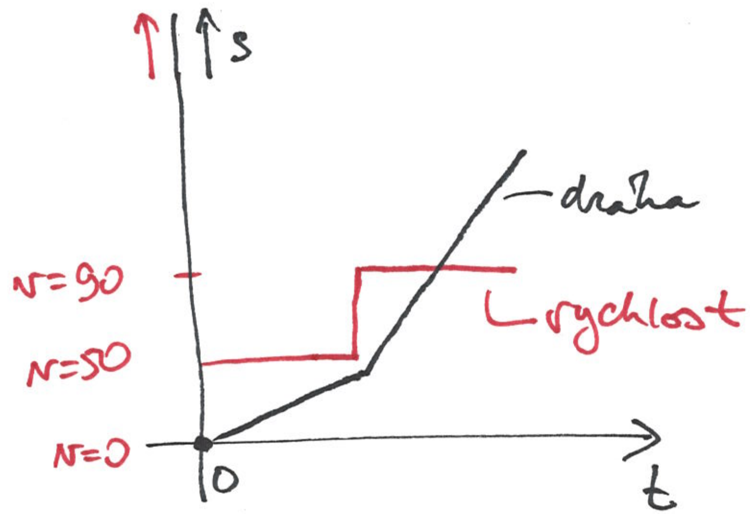
Př: $s(t)$ = dráha ujetá v čase t

$v(t)$ = (okamžitá) rychlost v čase t

Platí: $\boxed{v(t) = s'(t)}$

tj. rychlost je derivací dráhy

rychlost měří změnu dráhy.



Derivace základních fcí

(0) <u>konstanta</u> $f(x)=b \Rightarrow f'(x)=0$
pro $\forall x \in \mathbb{R}$

(1) <u>mocniny</u> $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f'(x)=n \cdot x^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$

pro $n=1$: $(x^1)'=1 \cdot x^0 = 1$
$n=2$: $(x^2)'=2 \cdot x^1 = 2x$
$n=3$: $(x^3)'=3x^2$
atd.

(2) <u>mocniny s reálným exponentem</u>
$f(x)=x^a$, $a \in \mathbb{R}$ pevné, $x \in \mathbb{R}_+$ proměnné

$\Rightarrow f'(x)=a \cdot x^{a-1}$

Spec. případ – odmocniny:

(2a) $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$, $D_f=\langle 0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{2} \cdot x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D_{f'}=(0,+\infty)=\mathbb{R}_+$

(2b) $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$

$f'(x)=\frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}=\frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}=$

$=\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{1-n}}=\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

(D_f – podle sudosti / lichosti n)

(3) <u>exponenciála</u> (s přiroz. základem)

$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

(platí pouze pro základ e!)

(4) <u>logaritmus</u> (přirozený)

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}_+$

Pravidla pro výpočet derivací

(a) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

(b) konst. $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(a \cdot f(x)\right)' = a \cdot f'(x)$

(c) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

= Leibnizovo pravidlo

(d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

(e) $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

chain rule (řetízkové pravidlo)

čili vzorec pro derivaci složené fce

Pozn.: víme: • derivace konstanty je 0

• konstanta, kterou násobím fci, „přežije" derivování

Z Leibn. pravidla (c) lze dokázat i (b):

$$(a \cdot f(x))' = \underbrace{a' \cdot f(x)}_{(a'=0)\, = 0} + a \cdot f'(x) = \underline{\underline{a \cdot f'(x)}}$$

Příklady:

(1) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 11x - 17$

$f'(x) = 3 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 4 \cdot x^3 + 7 \cdot 3x^2 - 8 \cdot 2x + 11 =$

$= \underline{\underline{15x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 16x + 11}}$

$(x \in \mathbb{R})$

(2) $f(x) = (\ln x) \cdot (x^2 + 3x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 3x) + (\ln x) \cdot (2x + 3) =$

$= \underline{\underline{x + 3 + (\ln x) \cdot (2x + 3)}}$, $x \in \mathbb{R}_+$

③ $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-4}$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(3x-4) - (2x+1)\cdot 3}{(3x-4)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6x} - 8 - \cancel{6x} - 3}{(3x-4)^2} = \underline{\underline{\frac{-11}{(3x-4)^2}}}$$

Je zbytečné roznásobovat jmenovatele.

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$

---

④ $h(x) = e^{-2x}$ (složená fce)

vnější fce: $f(y) = e^y$, $f'(y) = e^y$

vnitřní fce: $g(x) = -2x$, $g'(x) = -2$

chain rule: $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$

$= e^{-2x} \cdot (-2) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}$

$D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$

⑤ $h(x) = \ln(x^2 + 3x + 6)$

vnější $f(y) = \ln y$, $f'(y) = \dfrac{1}{y}$

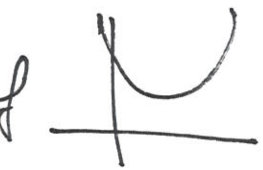
vnitřní $g(x) = x^2 + 3x + 6$, $g'(x) = 2x + 3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h'(x) = \frac{1}{x^2+3x+6} \cdot (2x+3)}}$$

D_h: musí být $x^2 + 3x + 6 > 0$

$D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = -15 < 0$

$\Rightarrow$ nemá reálné kořeny

u x^2 je 1 $\Rightarrow$ g má graf 

$\Rightarrow g(x) > 0$ v $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \underline{\underline{D_h = \mathbb{R}}}$

$D_{h'}$: musí být $x^2 + 3x + 6 \neq 0$

a to už víme, že platí pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\underline{D_{h'} = \mathbb{R}}}$

(6) $h(x) = \sqrt{x^2+4}$

vnější: $f(y) = \sqrt{y}$, $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

vnitřní: $g(x) = x^2+4$, $g'(x) = 2x$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Protože $\forall x \in \mathbb{R}$ je $x^2+4>0 \Rightarrow D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$

(7) $h(x) = e^{\sqrt{4x^2+1}}$ je fce

složená ze tří fcí:

$h(x) = g_1(g_2(g_3(x)))$, kde

$g_1(z) = e^z$, $g_1'(z) = e^z$

$g_2(y) = \sqrt{y}$, $g_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$g_3(x) = 4x^2+1$, $g_3'(x) = 8x$

$h(x) = \underbrace{g_1}_{\text{vnější}}(\underbrace{g_2(g_3(x))}_{\text{vnitřní}})$, chain rule:

$h'(x) = g_1'(g_2(g_3(x))) \cdot (g_2(g_3(x)))'$

zde je opět derivace složené fce

$(g_2(g_3(x)))' = g_2'(g_3(x)) \cdot g_3'(x)$

$\Rightarrow$ dohromady máme

$$\boxed{h'(x) = g_1'(g_2(g_3(x))) \cdot g_2'(g_3(x)) \cdot g_3'(x)}$$

$\rightarrow$ odsud název „chain rule"

V našem příkladě:

$h'(x) = e^{\sqrt{4x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot 8x =$

$= e^{\sqrt{4x^2+1}} \cdot \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$ $D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$

8 víme už, že $(e^x)' = e^x$

ale čemu se rovná $(a^x)' = ?$

(základ $a > 0$, $a \neq 1$, pevné)

víme $\boxed{a^x = e^{(x \cdot \ln a)}}$ — složená fce

vnější: $f(y) = e^y$, $f'(y) = e^y$

vnitřní: $g(x) = x \cdot \underbrace{\ln a}_{= \text{konst.}}$, $g'(x) = \ln a$

$$\Rightarrow \boxed{(a^x)'} = \left(e^{(x \cdot \ln a)}\right)' =$$

$$= e^{(x \cdot \ln a)} \cdot \ln a = \boxed{a^x \cdot \ln a}$$

<u>Pozn.</u>: pro $a = e \Rightarrow \ln e = 1 \Rightarrow (e^x)' = e^x \cdot 1 = e^x$

pro $a \neq e \Rightarrow \ln a \neq 1 \Rightarrow (a^x)'$ není a^x

9 $(x^a)' = ?$

My to už víme (viz základní fce), ale přesto si to spočítáme:

$h(x) = \boxed{x^a = e^{(a \cdot \ln x)}}$

vnější: $f(y) = e^y$, $f'(y) = e^y$

vnitřní: $g(x) = a \cdot \ln x$, $g'(x) = a \cdot \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow h'(x) = e^{(a \cdot \ln x)} \cdot a \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = \boxed{a \cdot x^{a-1}}$$

$(D_h = D_{h'} = \mathbb{R}_+)$

10 víme $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, co $(\log_a x)' = ?$

známe $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ← konst.

$$\Rightarrow \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}}$$

$D_h = \mathbb{R}_+$, $D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$